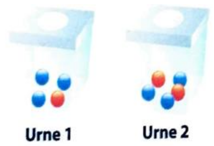
PROBABILITE

PROBABILITE

Quelles "chances" ai-je d'obtenir tel ou tel résultat?

Quelles "chances" ai-je d'obtenir tel ou tel résultat?

Paule propose un jeu avec une pièce à son petit-fils : « Pile je gagne, Face tu perds. » Quelles sont les chances de gagner de son petit-fils ?

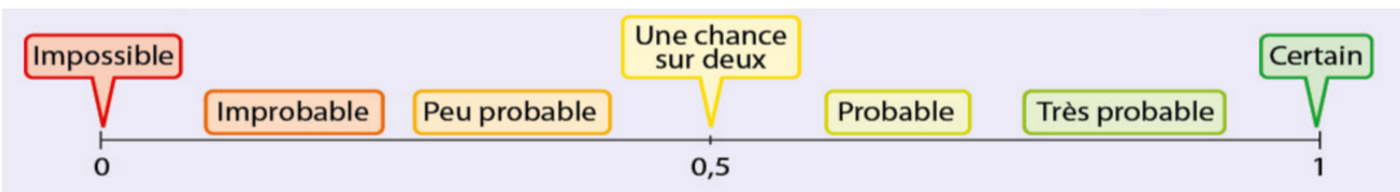


Lilou affirme : « j'ai autant de chance de piocher une boule bleue dans les deux urnes. Hermione lui rétorque : « Tu as tort » Qui a raison ?

Marie affirme : « 100% des gagnants au loto ont tenté leur chance ! Que penser de son affirmation ?

Louis demande à sa petite-fille Rose de choisir dans sa tête un nombre entre 1 et 10 au hasard. Quelles sont les chances, pour Louis, de deviner du premier coup le nombre choisi ?

Camellia a écrit chaque lettre de son prénom sur des cartons et demande maintenant à son grand-père de choisir au hasard un carton. A-t-il plus de chances de tirer une consonne ou une voyelle ?



La science des probabilités donne des outils pour répondre à ces questions

La science des probabilités donne des outils pour répondre à ces questions

I) MODELISER UNE EXPERIENCE ALEATOIRE

I) MODELISER UNE EXPERIENCE ALEATOIRE

Expérience 1

Je lance une pièce de monnaie non truquée.

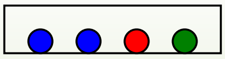
On regarde la face supérieure.

Expérience 2

Je lance un dé non truqué.

On regarde le nombre de points sur la face supérieure.

Expérience 3



Je tire au hasard une boule dans une urne contenant 2 boules bleues, 1 boule rouge et 1 boule verte. On regarde la couleur de la boule obtenue.

VOCABULAIRE et DEFINITIONS

- **Les issues** : Chaque résultat possible est une ISSUE de l'expérience.

Dans l'expérience du lancer de dé il y a 6 issues possibles :(1 ; 2 ;3 ;4 ;5 ;6)

- **Expérience aléatoire** : Une expérience est dite ALEATOIRE si ses issues ne dépendent que du hasard.

On ne peut pas connaitre le résultat à l'avance.

- **Un évènement** est constitué d'une ou de plusieurs issues.

Dans l'expérience de l'urne de boules l'évènement « Obtenir une boule bleue » a 2 issues alors que l'évènement « obtenir une boule rouge » a 1 seule issue.

- **Un évènement contraire** est l'évènement qui se réalise lorsque l'évènement A n'a pas lieu. L'évènement contraire de l'évènement A est noté **(non A) ou $\overline{A}$.**

Dans l'expérience 3 avec l'urne de boules, l'évènement « obtenir une boule rouge » a pour évènement contraire : ne pas obtenir une boule rouge.

Dans l'expérience du lancer de dé l'évènement « obtenir un 6 ». L'évènement contraire est : ne pas obtenir un 6 ».

- **Un évènement certain** est un évènement qui se réalise à tous les coups.

Dans l'expérience du lancer de dé l'évènement « obtenir un nombre » est un évènement certain.

- **Un évènement impossible** est un évènement qui ne se réalisera jamais

Dans l'expérience du lancer de dé l'évènement « obtenir 7 » est un évènement impossible.

- **Un évènement élémentaire** est un évènement réalisé par une seule issue. Ex : dans l'expérience 2: « obtenir 3 » , dans l'expérience 1 « obtenir pile », dans l'expérience 3 « tirer une boule rouge »

- **Deux évènements sont incompatibles** quand ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Dans l'expérience qui consiste à lancer deux dés simultanément, les évènements: A "avoir un 3 et un 6" et B "Obtenir deux nombres impairs" sont incompatibles.

II)PROBABILITE d'un évènement

II)PROBABILITE d'un évènement

Loi des grands nombres

Définition : Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence à laquelle se réalise un évènement se rapproche d'un nombre appelé ***fréquence théorique***. C'est cette fréquence théorique qui est ***appelée probabilité*** de cet évènement.

Exemple, Si on lance 4 fois une pièce de monnaie, on n'aura pas forcément 2 fois pile et 2 fois face. Mais si on lance la pièce un très grand nombre de fois on verra que le nombre de pile obtenu se rapproche sensiblement du nombre de face obtenu. C'est la loi des grands nombres.

La probabilité d'un évènement A représente les "chances" que l'évènement A se réalise. Lors d'une expérience aléatoire où toutes les issues sont équiprobables la probabilité de l'évènement **se note P(A) et se calcul :**

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement A}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Propriétés :

- La probabilité d'un évènement est un nombre compris **entre 0 et 1**
- La probabilité d'un évènement qui se produit à coup sûr **est égale 1** **(évènement certain)**
- La probabilité d'un évènement qui ne peut pas se produire est nulle **(évènement impossible)**
- **La somme des probabilités** des issues d'une expérience aléatoire est **égale à 1.**

Cas d'équiprobabilité

Définition : Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire **ont la même probabilité**, on dit que les issues sont **équiprobables**.

Si l'expérience comporte n issues équiprobables, la probabilité de chacune d'entre elles vaut : $\frac{1}{n}$

Evènements incompatibles

Propriété : si **deux évènements A et B sont incompatibles** alors la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égle à la somme des probabilités de ces évènements :

P(A ou B) = P(A) + P(B)

Evènements contraires

Définition et propriété : L'évènement contraire d'un évènement A est noté (non A) ou $\overline{A}$

L'évènement (non A) est réalisé lorsque l'évènement A n'est pas réalisé.

on a P(A) + P(non A) = 1 **Donc P(non A) = 1 - P(A)**

III) Calcul de quelques probabilités

III) Calcul de quelques probabilités

Formule à retenir pour calculer la probabilité d'un évènement :

$$P(\text{évènement}) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables à l'évènement}}{\text{Nombre total d'issues}}$$

Dans l'exemple1 de la pièce de monnaie : on considère l'évènement A : « obtenir pile »
Nombre d'issues favorables à A = nombre de manières d'avoir pile = 1
Nombre total d'issues = 2 (car on peut avoir face et pile)

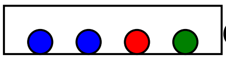
$P(A) = \frac{1}{2} =$ 0,5 = 50%

Dans l'exemple 2 du lancer de dé : On considère l'évènement B « Obtenir un 6 »
Nombre d'issues favorables à l'évènement B = nombre de manières d'avoir un 6 = 1
(car il n'y a qu'une seule manière d'avoir 6 avec un dé)
Nombre total d'issues = 6 (on peut obtenir1 ;2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6)

$P(B) = \frac{1}{6}$

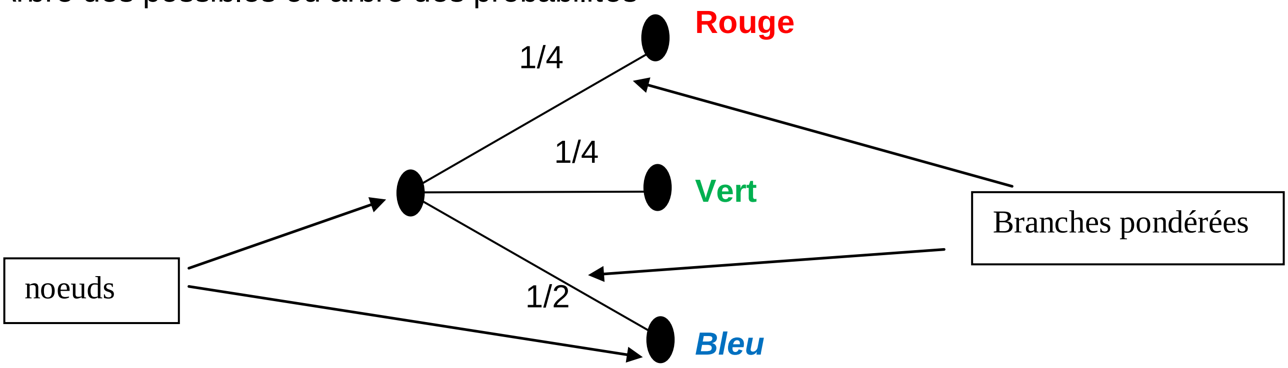
Dans l'exemple 2 du dé : On considère l'évènement C : « Obtenir un nombre pair »
Nombre d'issues qui réalisent l'évènement =
Nombre de manières d'avoir un nombre pair = 3 (car on peut avoir 2 ; 4 et 6).
Nombre total d'issues = 6 (on peut obtenir1 ;2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6)

$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Dans l'expérience 3 de l'urne  On considère l'évènement D « On tire une boule bleue »
Nombre d'issues favorables à l'évènement C =
Nombre de manières d'avoir une boule bleue = 2
(Il y a 2 boules bleues).
Nombre total d'issues = 4 issues possibles
(On peut tirer Bleue ; bleue ; rouge et vert)

$P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$

Arbre des possibles ou arbre des probabilités



IV) Construire et utiliser un arbre de probabilité

Pour représenter une expérience aléatoire comportant plusieurs épreuves, on peut construire un arbre de probabilité ou arbre des possibles.
Quand on fait figurer sur chaque branche la probabilité associée, on dit qu'on pondère l'arbre des possibles ou arbre pondéré.
Propriété : Dans un arbre pondéré, la probabilité de l'évènement auquel conduit un chemin est égale au **produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin**.

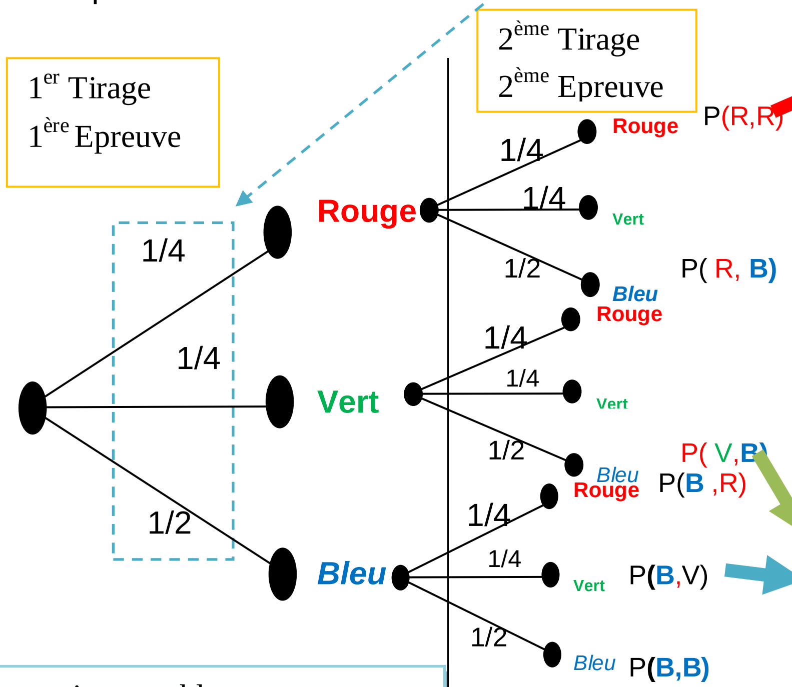
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à **1**

L'expérience 4 est constituée de deux épreuves successives.

Expérience 4

On tire au hasard une première boule puis une seconde en remettant la première dans un sac contenant 2 boules bleues, 1 boule rouge et 1 boule verte. On regarde la couleur des deux boules ainsi obtenues.

1°) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu deux fois la couleur rouge ?.
2°) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu les couleurs verte et bleue ?
3°) Quelle est la probabilité d'avoir au moins une fois la couleur bleue ?



1°) Obtenir deux fois la couleur rouge.

La probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités le long d'un chemin.

P(R,R) = P(R)×P(R) =

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

La probabilité d'avoir 2fois la coleur rouge est 0,0625

2°)Obtenir les couleurs verte et bleue. Il y a 2 issues favorables : Verte au 1er tirage puis bleue au 2ème ou bleue au 1er tirage et verte au 2ème.

On additionne les propbabilités des différentes issues. P(V,B) + P(B,V) =P(V)×P(B)+ P(B)×P(V) =

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

La probabilité d'obtenir les couleurs verte et bleue est 0,25

3°) Obtenir au moins une bleue

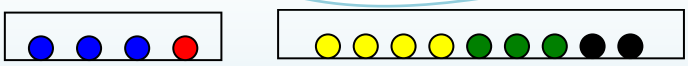
Il y a 5 issues favorables, il faut additionner la probabilités des 5 issues : P(R,B) + (B,R)+ P(V,B) + P(B,V)+P(B,B)=

$2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

La probabilité d'avoir au moins une boule bleue est de 0 ,75.

L'expérience 5 est constituée de deux épreuves successives

Expérience 5

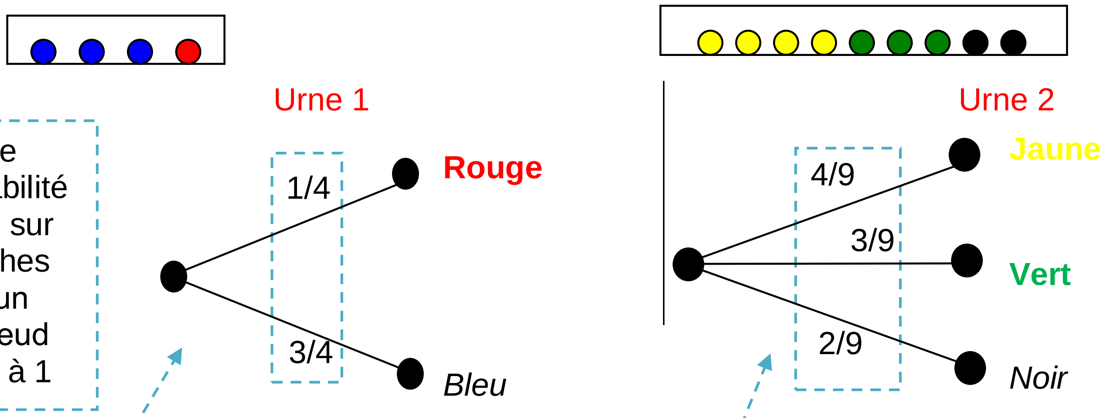


On tire au hasard une boule dans l'urne 1 (contenant 3 boules bleues et 1 boule rouge) et on tire une boule dans l'urne 2 (contenant 4 boules jaunes, 3 boules verte et 2 boules noires. On regarde la couleur des deux boules ainsi obtenues.

-

- Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue et une boule jaune ?

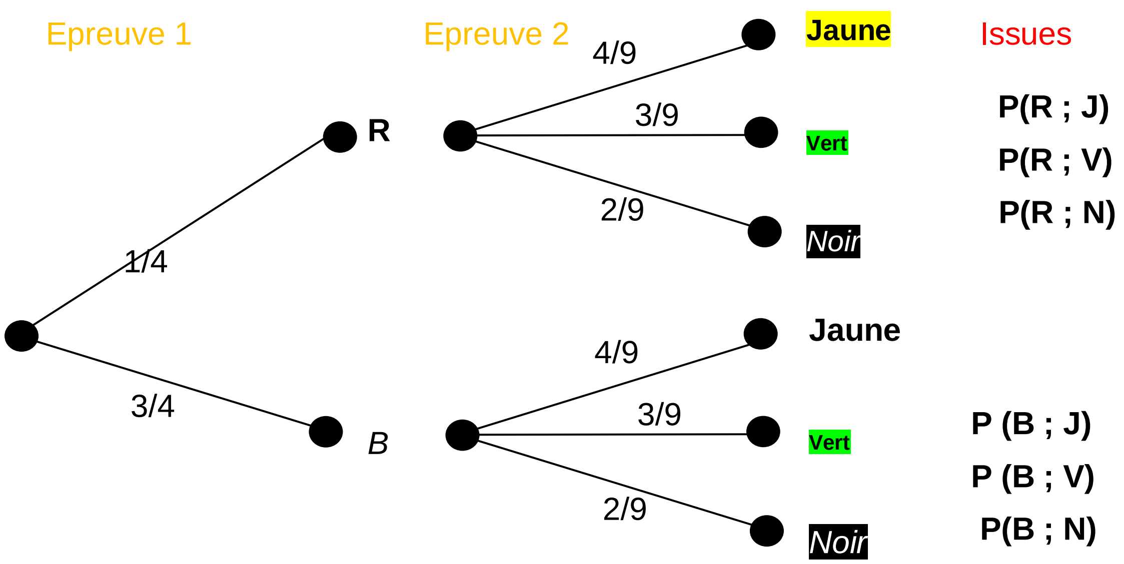
La somme desprobabilités portées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1



$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

$$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=1$$

On peut maintenant construire l'arbre pondéré de cette expérience à deux épreuves



La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin.

P(B,J)= P(B)×P(J) $= \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ **≈ 0,3**

La probabilité d'obtenir une boule bleue et une boule jaune est d'environ 0,3.

V) Pour approfondir et aller plus loin

- Simuler une expérience aléatoire à l'aide du tableur (Yvan Monka)

https://www.youtube.com/watch?v=ieKedDC3xNc&list=PLVUDmbpupCarU_2JQR0ANt8zKlZ-Yu3ck&index=6

- Les dessous mathématiques des jeux (Yvan Monka)

https://www.youtube.com/watch?v=NaNkJMevMFU&list=PLVUDmbpupCarU_2JQR0ANt8zKlZ-Yu3ck&index=8

- Faire d'autres exercices pour s'entrainer.(exemple de sites fiables mathenpoche 4ème et 3ème et Euler)
- Visionner d'autres vidéos sur internet (exemples de sites fiables :les bons profs ; Yvan Monka.)